NOM:_ ________________________ COGNOMS:____

Contesteu cada pregunta en els espais en blanc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.

Problema 1 (A)

1. Siguin C i D dos esdeveniments amb $P(C)$=0.25, $P(D)$=0.45 i $P(C \cap D)$=0. Quant val $P(\neg C \cap D)$? Justifiqueu la resposta. **(1 pt)**

   D és la unió disjunta de $(D \cap C)$ i $(D \cap \neg C)$.

   Llavors, $P(D \cap C) + P(D \cap \neg C) = P(D)$

   $\Rightarrow P(D \cap \neg C) = P(D) - P(D \cap C) = 0.45 - 0 = 0.45$

   (no hem utilitzat que $P(C) = 0.25$)

2. La variable X representa el nombre de gols que marca un equip de futbol en cada partit. La taula següent ofereix la informació sobre el nombre de gols marcats en els darrers 100 partits. **(3 Pts)**

Nombre de gols	0	1	2	3	4
Nombre de partits	40	30	15	10	5

a) Quin és el nombre esperat de gols per partit? Calculeu la desviació tipus del nombre de gols per partit.

La distribució de probabilitat del nombre de gols per partit:

P(X=0) = 0.40, P(X=1) = 0.30, P(X=2) = 0.15, P(X=3) = 0.10, P(X=4) = 0.05

El valor esperat: $E(X) = \sum_x x * P(X = x)$

$$= (0 * 0.40) + (1 * 0.30) + (2 * 0.15) + (3 * 0.10) + (4 * 0.05) = 1.10$$

La variància: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2.60 - (1.10)^2 = 1.39$

La desviació tipus: $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.39} \approx 1.18$

b) S'atorga una bonificació de 600 euros a l'equip per cada gol marcat. Si l'equip marca 3 o més gols, reben 300 euros addicionals de bonificació i, si marca 0 gols, se'ls multa amb 100 euros (bo negatiu). Obteniu la distribució de la variable "ingressos de la plantilla per gols marcats en un partit".

Sigui Y la variable “bonificació”:

P (Y = -100) = 0.40, P (Y = 600) = 0.30, P (Y = 1200) = 0.15, P (Y = 2100) = 0.10, P (Y = 2700) = 0.05

c) Calculeu la probabilitat de guanyar més de 1500€ en un sol partit donat que l'equip marca almenys 2 gols.

$$P(Y>1500 \mid X\geq 2) = \frac{P((Y>150\ \ )\cap(X\geq 2))}{P(X\geq 2)} = = \frac{0.15}{0.30} = ½$$

Donat que $(Y > 1500) \cap (X \geq 2) = (X \geq 3) = (Y \geq 2100)$, amb probabilitat:

P (Y >1500) = P (Y = 2100) + P (Y = 2700) = 0.10 + 0.05 = 0.15, i:

P (X ≥ 2) = P(X=2) +P(X=3) +P(X=4) = 0.15+0.10+0.05=0.30

3. En un poble determinat, el 30% de la gent són conservadors; 50% socialistes; i un 20% de liberals. En aquesta localitat a les darreres eleccions hi va votar el 65% dels conservadors, el 82% dels socialistes i el 50% dels liberals. Una persona de la ciutat és seleccionada a l'atzar i afirma que va votar a les darreres eleccions. (**2 Pts**)

a) Proporcioneu una taula que mostri les probabilitats conjuntes d'afiliació a partits i de participació en el vot (sí/no).

	conservadors	socialistes	liberals	
Sí	0.195	0.41	0.10	0.705
No	0.105	0.09	0.10	0.295
	0.30	0.50	0.20	1

P(conservador i Sí) = P(conservador)P(Sí | conservador) = 0.30 0.65 = 0.195

Etc.

b) Quina és la probabilitat que la persona seleccionada sigui socialista?

Siguin C (Conservador), S (Socialista) i L (Liberal) els esdeveniments per afiliació política.

Sigui V l’esdeveniment per una persona que ha votat a les darreres eleccions. Hem de trobar P (S|V), d’acord amb la informació:

$$P(C) = 0.3,\ P(S) = 0.5,\ P(L) = 0.2,$$

$$P(V|C) = 0.65\ P(V \mid S) = 0.82,\ P(V \mid L) = 0.5.$$

Pel teorema de Bayes,

$$P(S \mid V) = \frac{P(V \mid S)P(S)}{P(V)}$$

$P(V) = P(V \cap (C \cup S \cup L)) = P(V \cap C) + P(V \cap S) + P(V \cap L)$

$= P(V|C)\,P(C) + P(V|S)\,P(S) + P(V|L)\,P(L)$

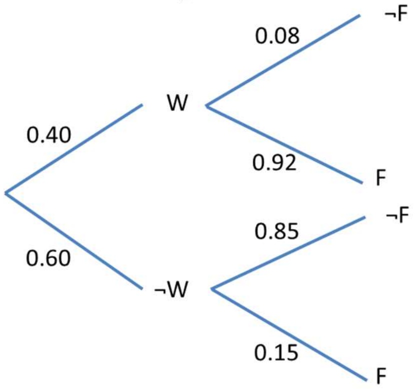
$= (0.65)\,(0.3) + (0.82)\,(0.5) + (0.5)\,(0.2)$

$= 0.705.$

Així, $P(S \mid V) = \frac{(0.82)(0.5)}{0.705} = 0.5816$.

4. S'ha estimat que el 40% dels correus electrònics entrants són relacionats amb la feina (W), i la resta són personals. Un filtre classifica correctament el 92% dels correus electrònics de treball a la carpeta "Treball" (F) i el 8% incorrectament a la carpeta "Personal". Per als correus electrònics personals, el filtre classifica el 85% correctament a la carpeta "Personal" i el 15% incorrectament a la carpeta "Treball". (**2 Pts**)

   a) Dibuixeu l'arbre de probabilitats dels esdeveniments descrits a l'experiència anterior.



   b) Trobeu quina és la proporció de correus electrònics personals a la carpeta "Treball".

$$P(\neg W \mid F) = \frac{P(\neg W \cap F)}{P(W \cap F) + P(\neg W \cap F)}$$

$$= \frac{0.09}{0.368+0.09} = \frac{0.09}{0.458} = 0.1965$$

Donat que: $P(W \cap F) = P(W) \times P(F \mid W) = 0.40 \times 0.92 = 0.368$, i

$P(\neg W \cap F) = P(\neg W) \times P(F \mid \neg W) = 0.60 \times 0.15 = 0.09$

5. Suposem que una màquina triga entre 0 i 3 hores a completar un cicle, on la probabilitat del temps de finalització augmenta proporcionalment en aquest interval. Denotem el temps de cicle per T, que segueix una funció de densitat de probabilitat donada per la funció següent. Contesteu les preguntes següents. **(2 Pts)**

$$f_T(t) = \frac{t}{4.5} \qquad \text{per a } 0 \le t \le 3$$

   a) Trobeu la funció de distribució acumulada de la variable. Calculeu la probabilitat d'observar un temps de cicle inferior a 1 hora.

$F_T(t) = \int_0^t \frac{x}{4.5}\,dx = \frac{t^2}{9}$ per a $0 \le t \le 3$, **0** per a $t < 0$, **1** per a $t > 3$.

$P(T < 1) = F_T(1)$, $P(T < 1) = \frac{1^2}{9} = \frac{1}{9} \approx 0.11$

   b) Calculeu el temps de cicle esperat i la mediana del temps de cicle, en minuts.

$E(T) = \int_0^3 t \cdot \frac{t}{4.5}dt = \int_0^3 \frac{t^2}{4.5}\,dt = \frac{27}{13.5} = 2\text{hr} = 120$ min.

Per la mediana del temps: $\frac{t_{0.5}^2}{9} = 0.5 \Longrightarrow t_{0.5}^2 = 4.5 \Longrightarrow t_{0.5} = \sqrt{4.5} \approx 2.12$ hr. $\approx$ 127,2min

NOM:________________________COGNOM:____

Contesteu cada pregunta en els espais en blanc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.

Problema 2 (B)

Un departament de beta-testers de pàgines web analitza possibles errors a les webs. S'ha determinat que poden trobar-ne de 3 tipus: *lleus*, *mitjans* i *greus*, amb probabilitats 0.4, 0.25 i 0.1 respectivament. Els errors trobats a cada pàgina web són independents, i si es troba un error d'algun tipus ja no es segueix analitzant. (*Definiu en cada apartat la variable i model adequats i expliciteu els càlculs*)

1. Analitzant 30 pàgines web, quina és la probabilitat de trobar més de 28 errors **lleus**? (1 punt)

X: nombre de pàgines amb errors lleus entre les 30 pàgines web

X és Bin (30, 0.4)

P(X>28) = P(X=29)+P(X=30) = $\binom{30}{29} 0.4^{29} 0.6 + \binom{30}{30} 0.4^{30} 0.6^{0}$= 30*$0.4^{29}$0.6 + 1*$0.4^{30} = 5.3 * 10^{-11}$

2. Quina és la mitjana d'errors **greus** que esperem trobar en les 30 pàgines web? I amb quina desviació tipus? (1 punt)

X: nombre de pàgines amb errors greus entre les 30 pàgines web

X és Bin (30, 0.1)

E(X) =30 · 0.1 = **3**

Var(X) = 30 · 0.1· 0.9 = 2.7 → Desviació = sqrt(2.7) = **1.64**

3. Quina és la probabilitat que la primera web amb error **mitjà** es trobi després de la cinquena web inspeccionada? (1 punt)

Y: nombre de webs inspeccionades fins una amb error de tipus mitjà

Y és Geom (0.25)

P(Y>5) = 1 – P(Y<=5) = 1 – (1 – $(0.75)^5$) = $(0.75)^5$ = **0.24**

4. Quina és la probabilitat que la cinquena web amb error **lleu** trobat coincideixi amb la vuitena web inspeccionada? (1 punt)

Y: nombre de webs inspeccionades fins 5 amb error de tipus lleu

Y ≈ BN (5,0.4)

P(Y=8) = $\binom{7}{4} 0.4^5 0.6^3 = 35 * 0.01024 * 0.216 = \mathbf{0.077}$

5. Ara suposem que durant una hora un beta-tester troba de mitjana 2 errors de **qualsevol tipus**, i que el nombre d'errors trobats per hora d'un beta-tester segueix una distribució de Poisson. Quina és la probabilitat que un dels beta-testers durant dues hores hagi trobat 3 errors? I menys de 2? (1 punt)

Y: nombre d'errors de qualsevol tipus durant una hora Y és Pois(2)

Y_1+Y_2 : nombre d'errors de qualsevol tipus durant dues hores Y_1+Y_2 és Pois(4)

P(Y_1+Y_2 = 3) = $(4)^3$*exp(-4)/3! = 64*0.0183/6 = **0.195**

P(Y_1+Y_2 < 2) = P(Y_1+Y_2=1)+P(Y_1+Y_2=1) = $(4)^1$*exp(-4)/1! + $(4)^0$*exp(-4)/0! = 4*0.0183 + 0.0183 = **0.0915**

6. Quina és la probabilitat que passin més de 30 min entre dos errors de qualsevol tipus trobats per un beta-tester? (1 punt)

Y: hores entre errors de qualsevol tipus Y és Exp(2) 30 min=1/2 h Ym: minuts entre errors Ym és Exp(2/60)

P(Y>1/2) = 1-P(Y<1/2) = 1-(1-exp(-2*0.5) = exp(-1) = **0.368** P(Ym>30) = exp(-2/60*30) = exp(-1) = **0.368**

Al departament de beta-testers treballen per projectes. Per finalitzar un projecte s'hi dediquen de mitjana 180 hores amb una desviació de 100 hores.

7. Si durant un mes han arribat 25 projectes, i l'equip de beta-testers hi pot dedicar en total com a màxim 4800 hores (30 treballadors per 160h mensuals cadascun), quina és la probabilitat que no es finalitzin tots els projectes? (1 punt)

X : "hores de dedicació per finalitzar un projecte"
$E(X) = 180$ i $Desv(X)=100$
$S=X_1+...+X_{25}$: hores de dedicació per finalitzar 25 projectes és Normal per TCL
$E(X_1+...+X_{25})=180\cdot 25=4500$ i $Desv(X_1+...+X_{20})=100\cdot\sqrt{25}=500$
S és $N(\mu=4500, \sigma=500)$

$P(S>4800)=P(Z>((4800-4500)/500)) = P(Z>0.6) = 1-P(Z<0.6) = 1-pnorm(0.6) = 1-0.7257469 =$ **0.274**

8. Quants projectes han d'arribar per tal que la desviació de la mitjana del temps dedicat sigui com a màxim 10? (1 punt)

La variable mitjana és Normal, pel TCL, amb desviació $\frac{100}{\sqrt{n}}$

$$Desv\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{100}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{100}{\sqrt{n}}\leq 10 \qquad \frac{100}{10}\leq\sqrt{n} \qquad 10\leq\sqrt{n} \qquad 10^2\leq(\sqrt{n})^2 \qquad \Leftrightarrow \quad \mathbf{100\leq n}$$

$(\textbf{\textit{ERROR GREU fer}}\ \sqrt{10}\leq \text{n})$

9. Suposem ara que el temps per finalitzar un projecte segueix una distribució normal. Quina és la probabilitat que s'hi hagin de dedicar entre 130 i 330 hores? (1 punt)

X : hores de dedicació per finalitzar un projecte
X és N(180,100)
$P(130 < X < 330) = P((130-180)/100 < Z < (330-180)/100) = P(-0.5<Z<1.5) =$
$= P(Z<1.5) – P(Z<-0.5) = P(Z<1.5) – (1 – P(<0.5)) = pnorm(1.5)-1+pnorm(0.5) = 0.9331928-1+0.6914625 =$ **0.625**

10. Quants beta-testers hauríem d'afegir als 30 disponibles per assegurar-nos de tenir una probabilitat del 0.95 de poder finalitzar els 25 projectes del mes? (suposem que cada beta-tester pot treballar 160 hores mensuals) (1 punt)

S és $N(\mu=4500, \sigma=500)$
$P(S<a) = 0.95 = P(Z<(a-4500)/500)$
qnorm(0.95) → 1.645 1.645=(a-4500)/500 a=5322.5 hores

5322.5/160 → 33.26 treballador 33.26-30 → Cal afegir 3.26 treballadors més → **4 treballadors més**

pnorm(2.75) = 0.99702	**pnorm(1.6) = 0.945201**	**pnorm(0.75) = 0.773373**	**qnorm(0.999) = 3.090232**	**qnorm(0.975) = 1.959964**
pnorm(2.5) = 0.99379	**pnorm(1.5) = 0.933193**	**pnorm(0.6) = 0.725747**	**qnorm(0.995) = 2.575829**	**qnorm(0.95) = 1.644854**
pnorm(1.96) = 0.975002	**pnorm(1) = 0.841345**	**pnorm(0.5) = 0.691462**	**qnorm(0.99) = 2.326348**	**qnorm(0.90) = 1.281552**